



INSTRUKCJE DLA ZAWODNIKÓW

Arkusze otwieramy na wyraźne polecenie komisji. Wszystkie poniższe instrukcje zostaną odczytane i wyjaśnione.

1. Arkusz składa się z **3 zadań**.
2. Każde zadanie składa się z **wprowadzenia** oraz kilku **pytań**.
3. Liczba punktów możliwa do uzyskania za każde pytanie podana jest przy jego treści. Suma tych punktów w każdym zadaniu wynosi 20.
4. Przed udzieleniem odpowiedzi na pytania **przeczytaj dokładnie** wprowadzenie oraz treści poleceń.
5. Swoje odpowiedzi zapisz **czytelnie** na przeznaczonych do tego arkuszach. Nieczytelne odpowiedzi **nie będą oceniane**.
6. Do zapisu odpowiedzi używaj wyłącznie **długopisu lub pióra z czarnym lub niebieskim** tuszem. Do wykonywania rysunków możesz użyć ołówka.
7. Każdy arkusz odpowiedzi powinien zawierać odpowiedź, lub jej część, na **tylko jedno** zadanie.
8. Na pierwszej stronie każdego arkusza odpowiedzi, w prawym górnym rogu, zapisz czytelnie **swój kod** oraz **numer zadania**.
9. Czas na rozwiązanie zadań wynosi **120 minut**.

Powodzenia!

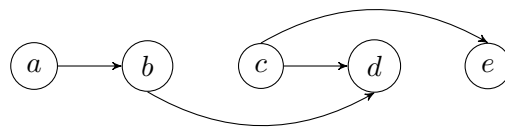
ZADANIE 1

Sortowanie topologiczne

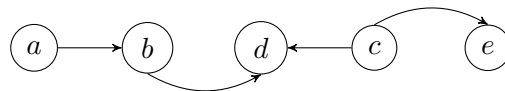
Wyobraź sobie, że chcesz zrobić naleśniki. Wymaga to wykonania serii pewnych czynności, w pewnej ustalonym porządku. Nie można, na przykład, posmarować naleśnika dżemem zanim się go usmaży. Czasami jednak kolejność nie ma znaczenia. Przygotowując ciasto można najpierw dodać mąkę, a następnie mleko lub odwrotnie – najpierw mleko, potem mąka.

Podobnie bywa z programami komputerowymi. Z reguły kolejność w jakiej komputer wykonuje instrukcje jest istotna, jednak czasem może być zmieniona, co może przyspieszyć działanie programu. Jednak żeby wybrać najszybszą kolejność, trzeba najpierw znaleźć wszystkie poprawne.

Służy do tego **sortowanie topologiczne**. W skrócie jest to takie ustawienie wierzchołków grafu w jednej linii, aby wszystkie krawędzie skierowane były w tę samą stronę. Musimy jednak uważać, żeby nie zgubić żadnych wierzchołków ani krawędzi!



Rysunek 1: Przykład prawidłowego sortowania topologicznego grafu



Rysunek 2: Przykład nieprawidłowego sortowania topologicznego grafu. Krawędź (c, d) skierowana jest w lewo, a wszystkie pozostałe w prawo

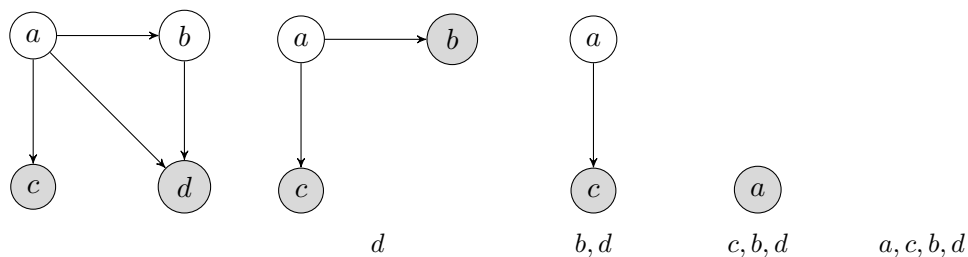
Formalnie sortowaniem topologicznym danego grafu będziemy nazywać takie uporządkowanie jego wierzchołków, w którym żadna krawędź nie wskazuje „wstecz”, t.j. z wierzchołka późniejszego do wcześniejszego.

Znalezienie takiego sortowania zaczynamy od wybrania kandydatów na ostatni wierzchołek ciągu. Takimi kandydatami będą wszystkie wierzchołki, które nie posiadają wychodzących krawędzi. Wybieramy jeden z tych wierzchołków, usuwamy go z grafu i . . . zaczynamy proces od nowa. Wybieramy kolejny „ostatni” wierzchołek, potem jeszcze jeden i tak aż graf pozostanie bez wierzchołków. Przykład działania tego algorytmu na rysunku 3.

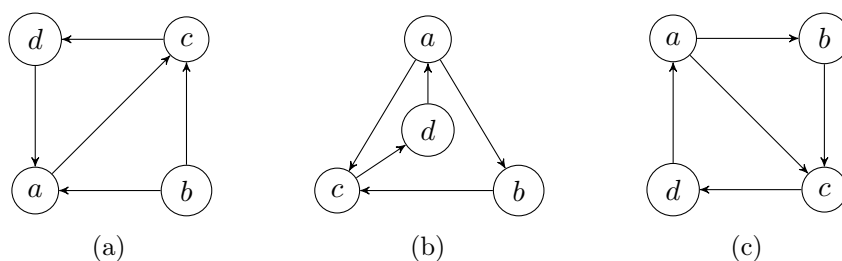
PYTANIA

PYTANIE 1 Dla każdego z grafów na rysunku 4 wypisz wszystkie wierzchołki i krawędzie. Które dwa grafy są identyczne? Czym różni się od nich trzeci graf? [7 punktów]

ZADANIE 1
Sortowanie topologiczne

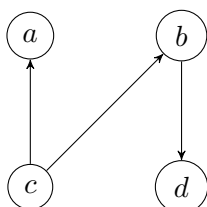


Rysunek 3: Przykład znajdowania sortowania topologicznego grafu. Na szaro oznaczeni są kandydaci na ostatni wierzchołek. Ostatecznie znalezione sortowanie to a, c, b, d



Rysunek 4: Przykłady do pytania 1

PYTANIE 2 Przerysuj graf z rysunku 5 ustawiając wierzchołki w jednej linii (jak na rysunkach 1 i 2) w kolejności: b, d, c, a . Czy ten ciąg wierzchołków stanowi prawidłowe sortowanie topologiczne tego grafu? Uzasadnij. [4 punkty]



Rysunek 5: Rysunek do pytań 2 i 3

PYTANIE 3 Podaj 2 różne przykłady sortowania topologicznego grafu z rysunku 5. [4 punkty]

PYTANIE 4 Narysuj graf, który posiada 4 wierzchołki i tylko jedno prawidłowe sortowanie. [2 punkty]

PYTANIE 5 Narysuj graf, który nie posiada prawidłowego sortowania topologicznego. Krótko uzasadnij, dlaczego. [3 punkty]

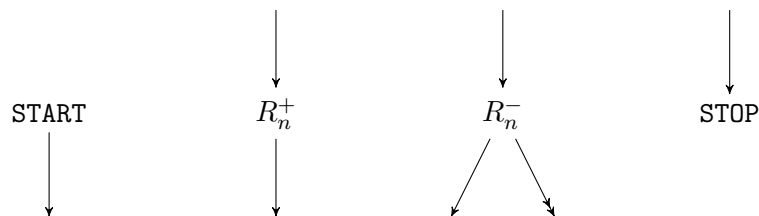
ZADANIE 2

Maszyny rejestrowe

Maszyna rejestrowa stanowi teoretyczny model obliczeń. Pozwala na opisywanie wielu funkcji matematycznych przy użyciu jedynie kilku prostych instrukcji.

Maszyna taka składa się z nieskończenie wielu **rejestrów**, numerowanych zera: R_0, R_1, R_2, \dots . Każdy z tych rejestrów jest w stanie zapamiętać wartość jednej liczby naturalnej.

Program takiej maszyny ma postać grafu skierowanego, w którym napotkać można cztery rodzaje wierzchołków: **START**, **STOP**, R_n^+ oraz R_n^- .



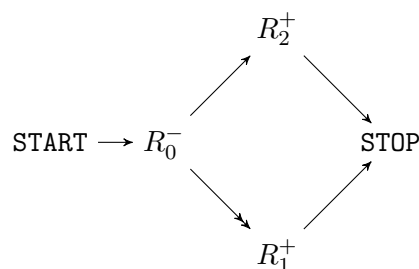
Rysunek 6: Rodzaje wierzchołków dozwolone w programie maszyny rejestrowej

Od wierzchołka **START** rozpoczynamy wykonanie programu. Nie wchodzi do niego żadna krawędź, a wychodzi tylko jedna. Możemy mieć tylko jeden taki wierzchołek w każdym programie.

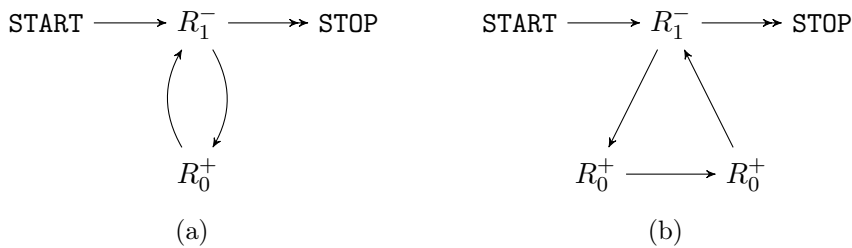
Działanie programu kończy się w wierzchołku **STOP**. Może wchodzić do niego dowolna liczba krawędzi, możemy mieć też wiele takich wierzchołków. Nie może jednak z niego wychodzić żadna krawędź.

Wchodząc do wierzchołka R_n^+ zwiększamy wartość w rejestrze R_n o jeden, po czym podążamy za jedyną wychodzącą stamtąd krawędzią. Wiele krawędzi może prowadzić do jednego takiego wierzchołka.

Wchodząc do wierzchołka R_n^- zmniejszamy wartość w rejestrze R_n o jeden, po czym podążamy za krawędzią z pojedynczą strzałką. Nie możemy jednak zmniejszyć wartości w R_n jeżeli jest ona równa zero – wtedy pozostawiamy ją bez zmian i przechodzimy dalej po krawędzi z podwójną strzałką. Wiele krawędzi może prowadzić do jednego takiego wierzchołka.



Rysunek 7: Przykład programu maszyny rejestrowej



Rysunek 8: Programy do pytań 1 i 2

Dla przykładu spójrz na rysunek 7. Załóżmy, że początkowo wszystkie rejestry przechowują wartość 0. Maszyna z powyższego rysunku zwiększy o 1 wartość rejestru R_1 , po czym zakończy działanie. Jednak gdyby początkowa wartość rejestru R_0 była inna od 0, zostałaaby zmniejszona o 1, po czym zawartość rejestru R_2 zwiększono by o 1.

PYTANIA

PYTANIE 1 Zakładając, że początkowo rejestr R_1 zawiera wartość 3, a pozostałe rejestry zera, jaka będzie wartość rejestrów R_0 i R_1 po zakończeniu działania każdego z programów na rysunku 8? [4 punkty]

PYTANIE 2 Zakładając, że początkowo rejestr R_1 zawiera wartość n , a pozostałe rejestry zera, jaka będzie wartość rejestrów R_0 i R_1 po zakończeniu działania każdego z programów z rysunku 8? Uzasadnij swoje odpowiedzi. [6 punktów]

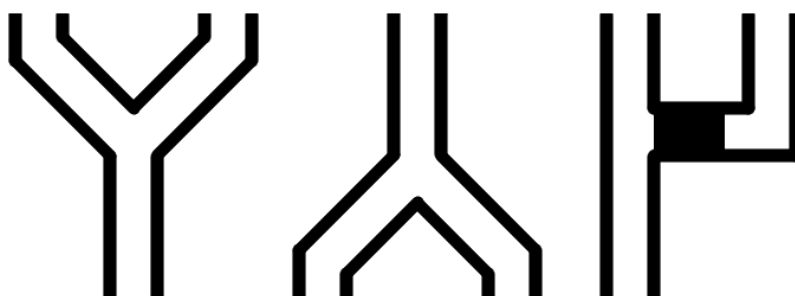
PYTANIE 3 Wiemy, że początkowo rejestr R_1 zawiera wartość x , R_2 wartość y , a wszystkie pozostałe rejestry zera. Narysuj program, po którego zakończeniu rejestr R_0 będzie zawierać wartość $x + y$, a pozostałe rejestry zera. [4 punkty]

PYTANIE 4 Wiemy, że początkowo rejestr R_1 zawiera wartość x , R_2 wartość y , gdzie $x > y$, a wszystkie pozostałe rejestry zera. Narysuj program, po którego zakończeniu rejestr R_0 będzie zawierać wartość $x - y$, a wszystkie pozostałe rejestry zera. [6 punktów]

ZADANIE 3

Logiczne rury

Mamy do dyspozycji rury, dowolnej długości i dowolnego kształtu. Mamy też do dyspozycji 3 rodzaje połączeń. Będziemy budować z nich systemy, przez które płynąć będzie woda.

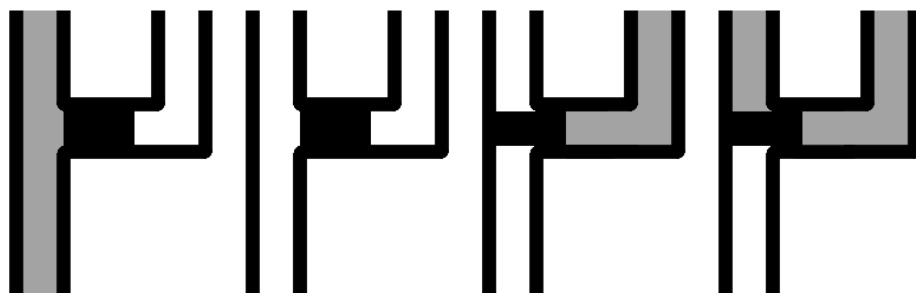


Rysunek 9: Dostępne rodzaje połączeń

Pierwszy rodzaj połączenia przypomina literę Y. Posiada dwie rury wchodzące oraz jedną wychodzącą. Jeżeli woda wpływa do co najmniej jednej z rur wchodzących, wypłynie ona rurą wychodzącą.

Drugi rodzaj połączenia posiada jedną rurę wchodzącą oraz dwie wychodzące. Jeżeli woda wpłynie do rury wchodzącej, to wypłynie z obu rur wychodzących.

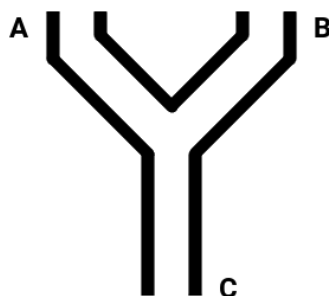
Ostatni rodzaj również posiada dwie rury wchodzące, jednak jedna z nich nie łączy się z rurą wychodzącą, a jedynie aktywuje blokadę drugiej z rur wchodzących. Jeżeli woda wpłynie tylko górną rurą, przepłynie przez połączenie. Jeżeli tylko boczną, z połączenia nie wypłynie nic. Jeżeli oboma, to górny przepływ zostanie zablokowany i z połączenia nie wypłynie woda.



Rysunek 10: Zasada działania trzeciego rodzaju połączenia

Przy użyciu tych rur będziemy budowali systemy o żądanych własnościach. Na przykład system, który posiada dwa wejścia A i B oraz wyjście C. Woda ma

wypłynąć z C jeżeli wpłynęła do A, B lub obu. System ten możemy zbudować z jednego połączenia pierwszego typu, jak poniżej.



Rysunek 11: Przykładowy system

Oczywiście każdy system może zawierać więcej niż jedno połączenie. Możemy łączyć wyjścia połączeń z wejściami innych, żeby otrzymać bardziej skomplikowane systemy o ciekawszych właściwościach.

PYTANIA

PYTANIE 1 Narysuj system rur, który posiada wejścia A, B i wyjście C. Woda powinna wypłynąć z C tylko i wyłącznie wtedy, jeżeli wpłynęła do B, ale nie wpłynęła do A. [2 punkty]

PYTANIE 2 Narysuj system rur, który posiada wejścia A, B i wyjścia C, D. Woda powinna wypłynąć z obu wyjść jeżeli wpłynęła do co najmniej jednego z wejść. [4 punkty]

PYTANIE 3 Narysuj system rur, który posiada wejścia A, B oraz wyjście C. Woda powinna wypłynąć z C jeżeli wpłynęła do jednego z wejść, ale nie do obu. [4 punkty]

PYTANIE 4 Narysuj system rur, który posiada wejścia A, B oraz wyjście C. Woda powinna wypłynąć z C tylko jeżeli wpłynęła do obu z wejść. [6 punktów]

PYTANIE 5 Czy możliwe jest stworzenie systemu z dwoma wejściami i jednym wyjściem, z którego wypłynie woda tylko wtedy, gdy nie wpłynie do żadnego z wejść? Jeżeli tak, narysuj go, jeżeli nie, uzasadnij dlaczego. [4 punkty]