



INSTRUKCJE DLA ZAWODNIKÓW

Arkusze otwieramy na wyraźne polecenie komisji. Wszystkie poniższe instrukcje zostaną odczytane i wyjaśnione.

1. Arkusz składa się z **3 zadań**.
2. Każde zadanie składa się z **wprowadzenia** oraz kilku **pytań**.
3. Liczba punktów możliwa do uzyskania za każde pytanie podana jest przy jego treści. Suma tych punktów w każdym zadaniu wynosi 20.
4. Przed udzieleniem odpowiedzi na pytania **przeczytaj dokładnie** wprowadzenie oraz treści poleceń.
5. Swoje odpowiedzi zapisz **czytelnie** na przeznaczonych do tego arkuszach. Nieczytelne odpowiedzi **nie będą oceniane**.
6. Do zapisu odpowiedzi używaj wyłącznie **długopisu lub pióra z czarnym lub niebieskim** tuszem. Do wykonywania rysunków możesz użyć ołówka.
7. Każdy arkusz odpowiedzi powinien zawierać odpowiedź, lub jej część, na **tylko jedno** zadanie.
8. Na pierwszej stronie każdego arkusza odpowiedzi, w prawym górnym rogu, zapisz czytelnie **swój kod** oraz **numer zadania**.
9. Czas na rozwiązanie zadań wynosi **120 minut**.

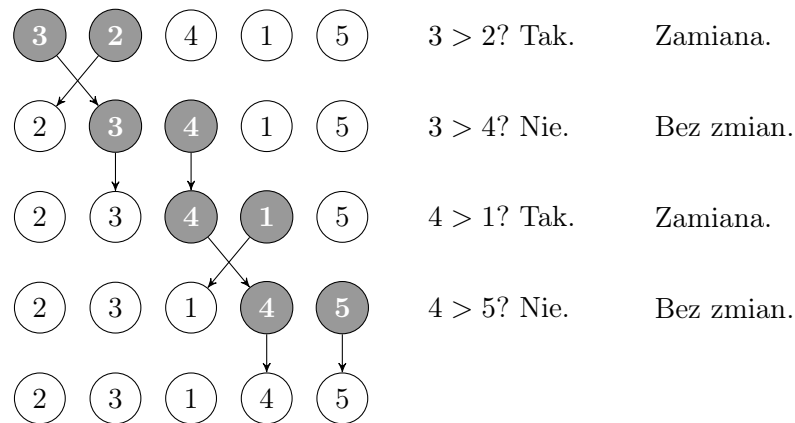
Powodzenia!

ZADANIE 1

Sortowanie bąbelkowe

Sortowanie bąbelkowe to jedno z prostszych rozwiązań problemu sortowania. Odpowiednią kolejność znajduje poprzez wykonanie pewnej liczby **przejsć**, która jest zależna nie tylko od liczby elementów ciągu, ale też ich ustawienia.

Każde przejście wygląda następująco: porównujemy ze sobą liczby na miejscach 1 i 2, następnie 2 i 3, potem 3 i 4 itd., aż porównamy ze sobą liczbę przedostatnią i ostatnią. Po każdym takim porównaniu, jeżeli liczba znajdująca się wcześniej jest większa od tej znajdującej się później (tj. są w złej kolejności), to zamieniamy je miejscami. Przykład na rysunku 1.



Rysunek 1: Przykład pojedynczego przejścia. Kolorem szarym oznaczone są obecnie porównywane liczby. Ostatni rząd przedstawia wygląd ciągu po zakończeniu przejścia.

Jeżeli w całym takim przejściu nie wykonaliśmy ani jednej zamiany dwóch liczb miejscami, to znaczy, że cały ciąg jest posortowany i możemy zakończyć proces sortowania. Jeżeli jednak zamiany były wymagane, to musimy wykonać kolejne przejście. Przykład na rysunku 2.

Posortowanie ciągu n liczb przy użyciu sortowania przez wybieranie wymagało wykonania około $\frac{1}{2}n^2$ porównań, niezależnie od ułożenia liczb w ciąg. W przypadku sortowania bąbelkowego, sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Liczba potrzebnych porównań zależy nie tylko od liczby elementów ciągu, ale też od ich początkowego ułożenia.



Rysunek 2: Przykład sortowania bąbelkowego. Kolejne rzędy przedstawiają stan ciągu liczb po kolejnych przejściach. Kolorem szarym oznaczono liczby, które zmieniły swoje miejsce po ostatnim przejściu.

PYTANIA

PYTANIE 1 Jak ciąg liczb 4, 3, 8, 5, 1, 9, 7, 6 będzie wyglądał po jednym przejściu? [2 punkty]

PYTANIE 2 Ile należy wykonać przejść, aby posortować ciąg 5, 1, 3, 4, 2? Napisz jak będzie wyglądać ten ciąg po każdym z nich. [4 punkty]

PYTANIE 3 Jaka jest największa, a jaka najmniejsza liczba przejść potrzebna do posortowania ciągu 5 liczb? Podaj przykłady ciągów, które można posortować przy użyciu tych liczb przejść. [4 punkty]

PYTANIE 4 Jaka jest największa, a jaka najmniejsza liczba przejść potrzebna do posortowania ciągu n liczb? Czym wyróżniają się ciągi, które wymagają tylu przejść? [4 punkty]

PYTANIE 5 Jaka jest największa, a jaka najmniejsza liczba **porównań** wymagana do posortowania ciągu n liczb? [2 punkty]

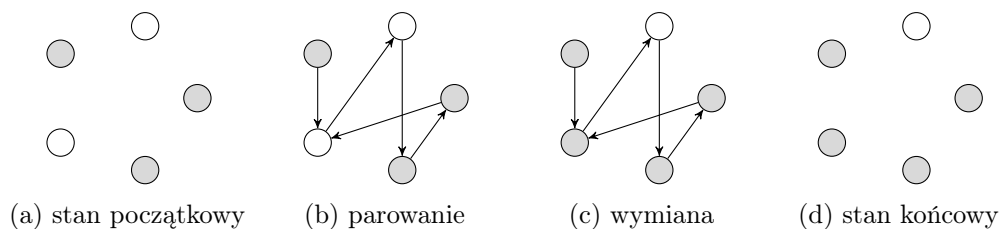
PYTANIE 6 Rozpatrzmy wszystkie ciągi składające się z liczb od 1 do n włącznie, bez powtórzeń. Ile jest takich ciągów? Ile z nich wymagać będzie najmniejszej możliwej liczby przejść do posortowania? Ile z nich największej? Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany ciąg będzie wymagać największej możliwej (dla ciągu tej długości) liczby przejść? [4 punkty]

ZADANIE 2

Plotkujące serwery

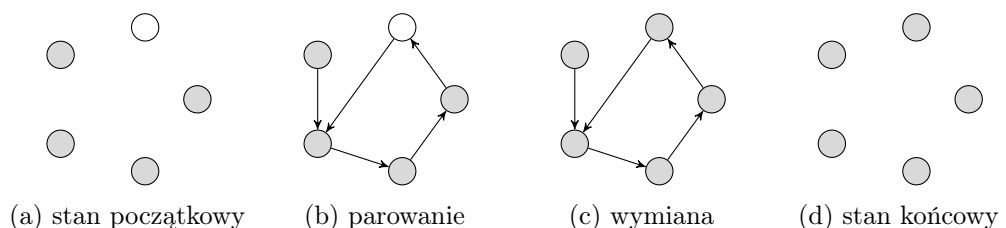
Systemy rozproszone to takie, w których wiele serwerów (komputerów) wykonuje wspólnie tę samą pracę. Każda duża strona internetowa wykorzystuje takie systemy. Oznacza to, że nie istnieje jeden centralny serwer, który obsługuje wszystkich użytkowników. W rzeczywistości jest ich wiele, a każdy z nich niezależnie obsługuje część ruchu. Wszystkie z nich muszą jednak wiedzieć o zmianach zachodzących na innych serwerach.

Jednym ze sposobów na wymianę nowych informacji jest **plotkowanie**. Mamy daną pewną liczbę serwerów. Część z nich zna nową informację (**plotkę**), a część nie. Aby rozsiać plotkę w nowe miejsca, każdy serwer losowo wybiera jeden inny serwer (**parowanie**) i przekazuje mu informację, której posiada (**wymiana**). Jeżeli serwer, który nie zna plotki zostanie wybrany przez serwer, który ją zna, to podczas wymiany poznaje plotkę. Dzieje się to jednocześnie między każdą utworzoną wcześniej parą.



Rysunek 3: Przykład pojedynczej wymiany plotki między serwerami. Kolorem szarym oznaczono serwery, które znają plotkę.

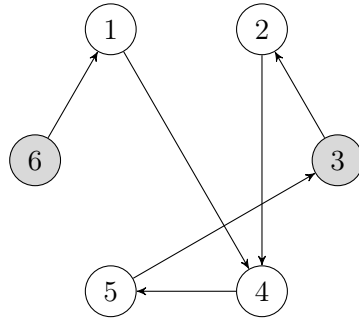
Po zakończeniu wymiany cały proces zaczyna się od początku. Każdy serwer losowo wybiera inny i przekazuje mu swoje informacje. Po pewnym czasie wszystkie serwery poznają plotkę i proces rozprzestrzeniania informacji kończy się.



Rysunek 4: Po wymianie na rysunku 3 jeden z serwerów nadal nie znał plotki. Dokonujemy więc kolejnej wymiany. Tym razem wszystkie serwery znają plotkę, zatem nie jest konieczna kolejna wymiana informacji.

PYTANIA

PYTANIE 1 Spójrz na rysunek 5. Po wymianie informacji, które serwery będą znać plotkę, a które nie? [3 punkty]



Rysunek 5: Przykład do pytania 1.

PYTANIE 2 Tylko jeden z pewnej liczby serwerów (co najmniej 2) zna plotkę. Ile serwerów będzie ją znać po jednej wymianie? Uzasadnij. [2 punkty]

PYTANIE 3 Tylko jeden z 4 serwerów zna plotkę. Jaka jest minimalna liczba wymian, po której wszystkie serwery będą znały plotkę? Narysuj kolejne parowania, pamiętając o zaznaczeniu które serwery znają plotkę przed każdą z nich. [2 punkty]

PYTANIE 4 Jaka największa liczba wymian jest potrzebna, aby wszystkie serwery poznały plotkę? Uzasadnij. [2 punkty]

PYTANIE 5 Dane są 4 serwery, spośród których 2 znają plotkę, reszta nie. Jaka jest minimalna, a jaka maksymalna liczba serwerów, która będzie znać plotkę po jednej wymianie? Narysuj przykładowe parowania. [4 punkty]

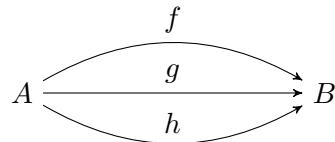
PYTANIE 6 Dane jest 8 serwerów, spośród których 3 znają plotkę, a reszta nie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden nowy serwer nie pozna plotki po jednej wymianie? Uzasadnij. [3 punkty]

Jaka jest maksymalna liczba serwerów, która w tej sytuacji pozna plotkę po jednej wymianie? Jakie jest prawdopodobieństwo, że taka sytuacja nastąpi? Uzasadnij. [4 punkty]

ZADANIE 3

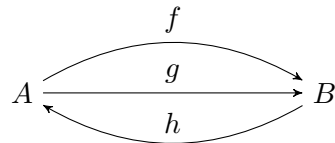
Kategorie przemienne

W kategorii między dwoma obiektami prowadzić może wiele różnych strzałek. Jeżeli nie wiemy, czy dwie strzałki są identyczne (t.j. są w rzeczywistości tą samą strzałką), to przyjmujemy, że nie są.



Rysunek 6: Z obiektu A do B prowadzą 3 strzałki: f , g i h . Nie wiemy o nich nic więcej, więc zakładamy, że są trzema różnymi strzałkami.

Kategoria przemienne to taka, w której z jednego obiektu do drugiego prowadzi zawsze tylko jedna strzałka. Innymi słowy, jeżeli z jednego obiektu do drugiego prowadzi wiele strzałek, to tak naprawdę stanowią one różne opisy tej samej strzałki i są do siebie identyczne.



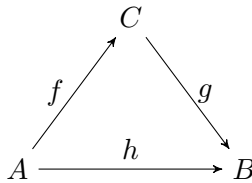
Rysunek 7: Tym razem strzałka h prowadzi z B do A . Gdyby ta kategoria nie była przemienne, mielibyśmy tu nieskończenie wiele różnych strzałek, np. $f \circ h$, $f \circ h \circ f$, $g \circ h \circ f$ itp.

Na przykład, gdyby kategoria na rysunku 7 była przemienne, to znajdowałyby się w niej jedynie 4 różne strzałki: f , h , $f \circ h$ oraz $h \circ f$. Wszystkie inne strzałki stanowiłyby jedynie inny opis jednej z czterech strzałek powyżej, na przykład:

- $g = f$, ponieważ obie prowadzą z A do B ,
- $h \circ f \circ h = h$, ponieważ obie prowadzą z B do A ,
- $g \circ h = f \circ h$, ponieważ obie prowadzą z A do A ,
- $h \circ g \circ h \circ g = h \circ f$, ponieważ obie prowadzą z B do B .

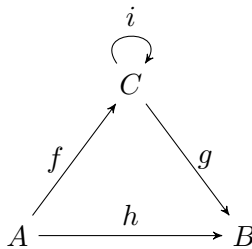
PYTANIA

PYTANIE 1 Ile strzałek znajduje się kategorii na rysunku 8, jeżeli **nie jest** ona przemienna? Wypisz je wszystkie. Pamiętaj o strzałkach, które nie zostały narysowane. [4 punkty]



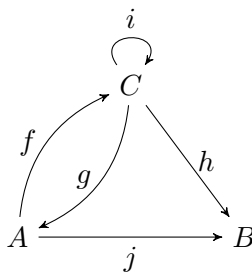
Rysunek 8: Przykład do pytania 1.

PYTANIE 2 Ile strzałek znajduje się kategorii na rysunku 9, jeżeli **nie jest** ona przemienna? Wypisz co najmniej 6. [4 punkty]



Rysunek 9: Przykład do pytania 2.

PYTANIE 3 Kategoria na rysunku 10 **jest** przemienna. Do każdej ze strzałek f , h , i oraz j dopisz po jeszcze jednym opisie. [4 punkty]



Rysunek 10: Przykład do pytania 2.

PYTANIE 4 Jaka jest największa liczba różnych strzałek, które może posiadać kategoria przemienna mająca 3 obiekty? Narysuj taką kategorię. [4 punkty]

PYTANIE 5 Jaka jest największa liczba różnych strzałek, które może posiadać kategoria przemienna mająca n obiektów? Uzasadnij. [4 punkty]