



Malachoviacus Informaticus

Etap I, arkusz przykładowy

INSTRUKCJE DLA ZAWODNIKÓW

Nie otwieraj arkusza z zadaniami dopóki nie zostaniesz o to poproszony. Instrukcje poniżej zostaną ci odczytane i wyjaśnione.

1. Arkusz składa się z *3 zadań*.
2. Każde zadanie składa się z *wprowadzenia* oraz *trzech* pytań.
3. Pytania w każdym zadaniu warte są kolejno 3, 6 i 9 punktów, t.j. 18 punktów za każde zadanie.
4. Przed udzieleniem odpowiedzi na pytania przeczytaj i upewnij się, że rozumiesz wprowadzenie.
5. Swoje odpowiedzi na pytania zapisz na przeznaczonych do tego liniowanych arkuszach.
6. Do zapisu odpowiedzi używaj wyłącznie *ługopisu lub pióra z czarnym lub niebieskim tuszem*.
7. Każdy arkusz powinien zawierać odpowiedź (lub jej część) na *tylko jedno* pytanie.
8. Zapisuj arkusze *jednostronnie*.
9. W lewym górnym rogu każdego arkusza zapisz czytelnie swoje *imię, nazwisko, numer zadania, numer pytania* i, jeżeli odpowiedź zajęła więcej niż jeden arkusz, *numer strony i liczbę stron*. Na przykład:

Jan Kowalski
Zadanie 1, Pytanie 2
Strona 1/3
10. Użycie kalkulatora jest dozwolone, jednak żadne z zadań tego nie wymaga.
11. Czas na rozwiązanie zadań wynosi *180 minut*.

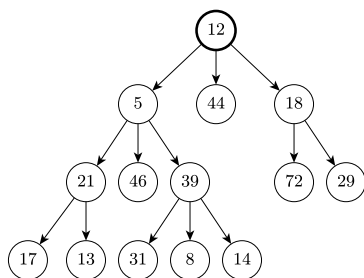


ZADANIE 1

Drzewa przeszukiwań binarnych

Dane w komputerze mogą być zapisywane w różnych *strukturach danych*. Jednym z rodzajów takich struktur są *drzewa*.

Drzewa składają się z *wierzchołków* oraz łączących je *krawędzi*. Każdy z wierzchołków posiada przypisaną do niego wartość. Wartości mogą być zupełnie dowolne, jednak w tym zadaniu ograniczymy się do liczb naturalnych.

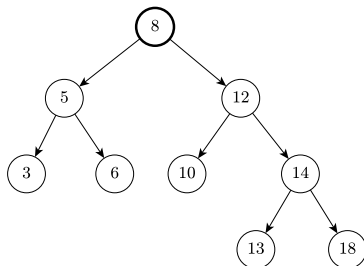


Rysunek 1: Przykładowe drzewo

Jedną z cech wyróżniających drzewa jest to, że ich krawędzie nie tworzą *cykli*, czyli pętli. Poza tym każde drzewo posiada *korzeń*, czyli wierzchołek nadrzędny. W przykładzie powyżej jest to wierzchołek 12.

Dzięki tym dwóm właściwościom możemy w drzewie określić jasną hierarchię wśród wierzchołków. Mówimy, że wierzchołek A jest *dzieckiem* wierzchołka B , jeżeli łączy je krawędź oraz A znajduje się niżej w hierarchii. Możemy też wtedy powiedzieć, że B jest *rodzicem* wierzchołka A . Na przykład na rysunku 1 wierzchołek 21 jest rodzicem wierzchołka 13.

Wśród drzew wyróżniamy *drzewa binarne*, to jest takie, w których każdy wierzchołek posiada co najwyżej 2 dzieci (to znaczy 0, 1 lub 2).



Rysunek 2: Przykładowe drzewo przeszukiwań binarnych

Z kolei specyficznym rodzajem drzew binarnych są *drzewa przeszukiwań binar-*



nyc. Ich cechą charakterystyczną jest to, że dla każdego wierzchołka prawdą jest, że wszystkie wierzchołki po jego lewej stronie mają wartości mniejsze niż on sam, natomiast te po prawej stronie – wartości większe.

Zwróć uwagę, że wierzchołek 13 w przykładowym drzewie przeszukiwań binarnych nie może mieć żadnych dzieci, ponieważ dziecko po lewej musiałoby być jednocześnie mniejsze od 13 i większe od 12, a dziecko po prawej jednocześnie większe od 13 i mniejsze od 14. Wśród liczb naturalnych nie da się znaleźć wartości spełniających te warunki.

PYTANIA

PYTANIE 1 Istnieje więcej niż jeden sposób umieszczenia wartości w drzewie przeszukiwań binarnych. Na rysunku 2 widoczne jest drzewo posiadające wartości 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14 i 18. Narysuj inne drzewo przeszukiwań binarnych, które posiada dokładnie te same wartości.

PYTANIE 2 W hierarchii drzewa można łatwo wyróżnić poziomy. Na jeden poziom składają się wszystkie wierzchołki równo odległe (w sensie liczby krawędzi) od korzenia. Drzewo na rysunku 2 posiada 4 poziomy.

Jaka jest maksymalna liczba wierzchołków, jakie może posiadać drzewo binarne posiadające 4 poziomy? A jaka minimalna? Uzasadnij.

Co gdyby drzewo posiadało n poziomów?

PYTANIE 3 Wyobraź sobie, że stoisz na planszy w kształcie drzewa przeszukiwań binarnych. Stojąc na danym wierzchołku możesz odczytać jego wartość, iść w lewo, w prawo lub w górę drzewa. Przejście do nieistniejącego wierzchołka nie jest dozwolone (na przykład na rysunku 2 nie można iść w lewo ani w prawo z wierzchołka 6).

Rozpoczynasz w korzeniu i otrzymujesz jedną z wartości znajdujących się w tym drzewie. Twoim zadaniem jest odnalezienie tej wartości wykonując jak najmniej przejść. Opisz swoją strategię. Krótko uzasadnij dlaczego uważasz, że jest optymalna.

Dokąd zaprowadziłaby cię twoja strategia, gdyby dana wartość nie znajdowała się w tym drzewie? Jak powinieneś ją zmienić, gdyby twoim zadaniem było określenie, czy dana wartość znajduje się w drzewie?

Uwaga! Zwróć uwagę, że stojąc na planszy w kształcie drzewa przeszukiwań binarnych, wartości mniejsze od obecnej są po twojej prawej, a wartości większe po twojej lewej stronie (odwrotnie niż jakbyśmy patrzyli na taką planszę z góry).



ZADANIE 2

Maszyna rejestrowa

Dana jest maszyna, która jest w stanie wykonywać obliczenia. Jej budowa i zasada działania jest dość prosta.

Główną częścią tej maszyny jest nieskończenie długa taśma, która posiada początek, ale nie posiada końca. Jest ona podzielona na nieskończenie wiele pól, zwanych *rejestrami*. Stąd maszyna nazywa się rejestrową. Rejestry numerowane są od 0 kolejnymi liczbami naturalnymi.

Maszyna ta może wykonywać dwa rodzaje operacji. Pierwszą jest zwiększenie wartości wybranego rejestru o 1. Drugą jest zmniejszenie wartości wybranego rejestru o 1, przy czym operacja ta powiedzie się tylko wtedy, kiedy wartość w danym rejestrze jest większa od 0.

Operator tej maszyny przyjmuje programy składające się z ponumerowanej listy instrukcji. Każda z instrukcji może przyjąć jedną z 3 postaci:

1. $+ n s$ – zwiększa wartość n -tego rejestru o 1 i przechodzi do instrukcji s
2. $- n s p$ – zmniejsza wartość n -tego rejestru o 1. W przypadku sukcesu przechodzi do instrukcji s , w przeciwnym razie do instrukcji p
3. **stop** – kończy działanie programu

Program musi posiadać instrukcję z numerem 0, ponieważ od niej rozpoczyna się jego wykonanie. Poza tym numery instrukcji są dowolne, jednak muszą być unikalne (tj. każde dwie instrukcje muszą mieć dwa różne numery).

Wraz z programem przekazać można wartości początkowe niektórych rejestrów. Pozostałe z nich zostaną ustalone na 0.

Po zakończeniu działania programu zwracany jest wycinek taśmy, który twój program wykorzystywał.

Przykładowy program:

```
0: - 0 0 1
1: stop
```

Odejmuje on 1 od rejestru 0 tak długo, jak jest to możliwe. To znaczy zeruje wartość rejestru 0.

Można też zapisać to nieco bardziej formalnie:

$$[n, \dots] \rightarrow [0, \dots]$$



PYTANIA

PYTANIE 1 Napisz program, który przeniesie wartość rejestru 1 do rejestru 0. Wartość początkowa rejestru 0 może być różna od 0.

$$[a, b, \dots] \rightarrow [b, _, \dots]$$

Zapis „_” oznacza, że wartość danego rejestru nie jest istotna (może być dowolna).

PYTANIE 2 Napisz program, który skopiuje wartość z rejestru 0 do rejestru 1. Musi być przy tym zachowana wartość w rejestrze 0.

$$[a, 0, \dots] \rightarrow [a, a, \dots]$$

PYTANIE 3 W rejestrach 0 i 1 znajdują się dwie liczby. Napisz program, który obliczy i umieści w rejestrze 2 wartość bezwzględną ich różnicy. Muszą być przy tym zachowane wartości w rejestrach 0 i 1.

$$[a, b, 0, \dots] \rightarrow [a, b, |a - b|, \dots]$$