Materiały dla finalistów

Malachoviacus Informaticus 2016

11 kwietnia 2016

Wprowadzenie

Poniższy dokument zawiera opisy zagadnień, które będą niezbędne do rozwiązania zadań w drugim etapie konkursu. Polecamy dokładnie zapoznać się z dostarczonymi wyjaśnieniami. Przydatne może być również wyszukanie dodatkowych informacji na poniższe tematy na własną rękę.

Zapoznanie się i zrozumienie informacji zawartych poniżej jest częścią konkursu. Rozwiązywanie zadań na końcu każdej z sekcji **nie** jest wymagane, jednak może pomóc w lepszym zrozumieniu materiału.

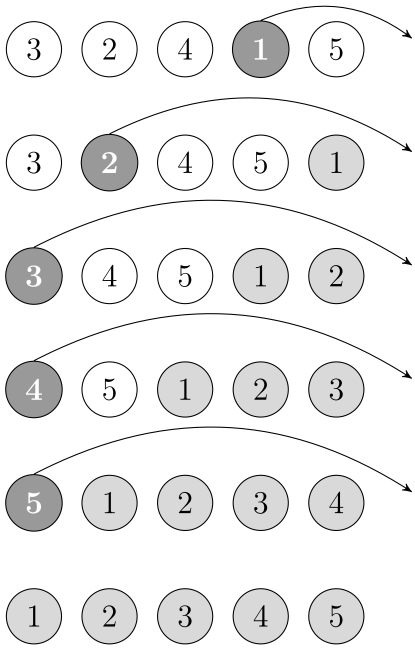
1 Sortowanie przez wybieranie

Jednym z podstawowych problemów w informatyce jest problem **sortowania**. Zadanie polega na uporządkowaniu pewnego zestawu liczb w kolejności rosnącej, to jest takiej, że każda następna liczba jest większa od poprzedniej. Na przykład zestaw liczb 3, 2, 4, 1, 5 po posortowaniu wyglądać będzie tak: 1, 2, 3, 4, 5.

Wydaje się, że jest to proste zadanie, jednakże komputer nie jest w stanie po prostu spojrzeć na liczby i wybrać odpowiedniej kolejności. Ty też możesz mieć problemy, jeżeli liczb nie jest kilka lub kilkanaście, ale kilka tysięcy lub milionów.

Jednym z najprostszych rozwiązań tego problemu jest **sortowanie przez wybieranie**. Polega ono na ciągłym wybieraniu **minimum** (najmniejszej liczby) i usuwaniu go z zestawu, aż nie zostanie nam żadna liczba. Kolejno wybrane wartości będą tworzyć nasz posortowany zestaw. Przykład na rysunku 1.

Pozostaje nam problem wybrania najmniejszej spośród liczb. Posiada on jednak równie proste rozwiązanie. Wystarczy przejrzeć wszystkie elementy zestawu jeden po drugim, zapamiętując jaka była najmniejsza liczba jaką do tej pory widzieliśmy. Jeżeli obecna wartość jest mniejsza od tej zapamiętanej, zapamiętujemy ją jako nowe minimum. Przykład na rysunku 2.



Rysunek 1: Przykład sortowania przez wybieranie. Kolorem ciemnoszarym oznaczone są kolejne minima, jasnoszarym zaś posortowane już liczby.

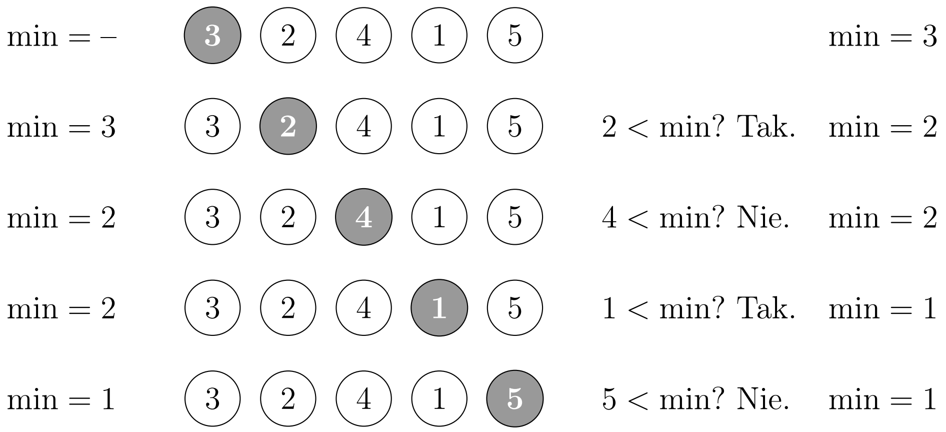
Istotną cechą każdego algorytmu jest liczba operacji, które składają się na jego wykonanie w zależności od liczby i wielkości danych liczb. W tym zadaniu szczególnie interesuje nas liczba potrzebnych porównań. W naszym przykładzie wyszukiwania minimum musimy wykonać ich 4 (patrz rysunek 2).

Gdybyśmy chcieli wybrać minimum 8 liczb, musielibyśmy wykonać 7 porównań: każdą z liczb, oprócz pierwszej, musielibyśmy porównać z dotychczasowym minimum. Dla 100 liczb potrzebowalibyśmy 99 porównań – znów, każdą z liczb oprócz pierwszej porównujemy z dotychczasowym minimum. W ogólności dla n liczb musimy wykonać $n - 1$ porównań, aby znaleźć najmniejszą.

Zastanówmy się ile porównań należy wykonać, aby posortować zestaw liczb. Gdyby liczb było 5, musielibyśmy najpierw wykonać 4 porównania, żeby znaleźć minimum 5 liczb, potem 3 porównania dla minimum z 4 liczb, 2 porównania dla minimum 3 liczb, a na koniec 1 porównanie dla minimum 2 liczb. W sumie potrzebujemy $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ porównań.

Podobnie dla 10 liczb potrzebujemy $9 + 8 + 7 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 45$ porównań. Dla n liczb potrzebujemy $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1$ porównań. Dzięki wzorowi na sumę n pierwszych liczb naturalnych, możemy policzyć, że w sumie daje to $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ porównań.

Jako że dla dużych liczb n^2 jest znacznie większe od n, możemy przybliżyć liczbę potrzebnych porównań jako $\frac{1}{2}n^2$, co pozwoli nam zaobserwować, że



Rysunek 2: Przykład wybierania minimum. Kolorem ciemnoszarym oznaczona jest obecnie rozpatrywana wartość. Z lewej strony znajduje się wartość zapamiętanego minimum przed rozpatrzeniem kolejnej wartości, a z prawej strony – po rozpatrzeniu.

przy dwukrotnym powiększeniu zestawu liczb będziemy potrzebować 4 razy więcej porównań.

Zadanie

Powyższy tekst to treść (i część rozwiązania) zadania 1 z I etapu zeszłorocznej edycji konkursu. Polecamy rozwiązać to zadanie w całości.

2 Proste prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo można rozumieć jako określenie częstości występowania danego zdarzenia w długiej serii powtórzeń pewnej czynności.

Na przykład, jeżeli rzucimy zwykłą sześcienną kostką do gry wiele razy, oczekiwać będziemy, że średnio co szósty rzut zakończy się wypadnięciem liczby 5. Możemy powiedzieć wtedy, że prawdopodobieństwo wypadnięcia tej liczby przy rzucie kostką wynosi $\frac{1}{6}$.

Do opisu prawdopodobieństw używamy liczb rzeczywistych od 0 do 1 włącznie. Im wyższe prawdopodobieństwo, tym częściej uzyskamy dany wynik przy wielu powtórzeniach. Prawdopodobieństwo równe 0 oznacza, że dany wynik nie zdarzy się nigdy, natomiast 1, że zdarzy się za każdym razem.

Załóżmy, że nasza kostka do gry jest idealna i zawsze wyląduje na ścianie, nigdy na krawędzi lub wierzchołku. Do tego każda z jej ścian ma takie samo prawdopodobieństwo wypadnięcia przy wykonaniu rzutu. Wtedy prawdopodobieństwo wypadnięcia każdej z liczb wynosi $\frac{1}{6}$.

W ogólności, dla n różnych możliwych wyników, z których każdy jest tak samo prawdopodobny, prawdopodobieństwo każdego z nich z osobna wynosi $\frac{1}{n}$.

Takie proste zdarzenia (często zwane **elementarnymi**) możemy ze sobą grupować i liczyć ich sumaryczne prawdopodobieństwo. Na przykład: jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby parzystej? Wystarczy, że dodamy do siebie prawdopodobieńśtwa wyrzucenia dwójki, czwórki i szóstki. Dostaniemy wtedy $\frac{3}{6}$, czyli $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby większej od 4? Sumujemy prawdopodobieństwo wyrzucenia 5 i 6, dostajemy $\frac{2}{6}$, czyli $\frac{1}{3}$.

Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne posiadają równe prawdopodobieństwa, to prawdopodobieństwo złożonych zdarzeń możemy policzyć dzieląc przez siebie liczbę zdarzeń elementarnych pasujących do naszego warunku przez liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

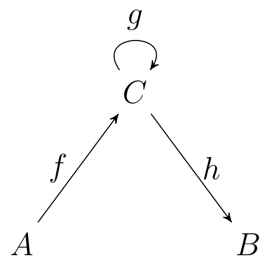
Musimy jednak uważać, aby na pewno rozpatrywać takie zdarzenia elementarne, które mają równe prawdopodobieństwo. Gdybyśmy chcieli policzyć jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch orłów przy rzucie dwiema monetami, musimy rozpatrzyć 4 zdarzenia elementarne: dwie reszki, dwa orły, reszka-orzeł oraz orzeł-reszka. Nawet jeżeli dwie monety są od siebie nierozróżnialne, z punktu widzenia prawdopodobieństwa ma znaczenie na której monecie wypadł orzeł, a na której reszka.

Zadania

1. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia na sześciennej kostce:
   (a) liczby podzielnej przez 3?
   (b) liczby mniejszej od 2?
   (c) liczby większej od 6?
   (d) liczby większej od 0?
2. Przy rzucie dwiema sześciennymi kostkami,
   (a) jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 4?
   (b) jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie większa od 10?
   (c) jaka suma oczek jest najbardziej prawdopodobna? Jaka najmniej?

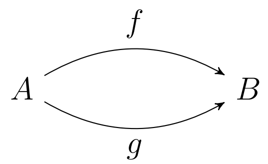
3 Teoria kategorii

Kategoria jest pewnym specyficznym rodzajem grafu. Składa się z **obiektów** (wierzchołków) oraz **strzałek** (skierowanych krawędzi). Kategorię od zwykłego grafu odróżnia to, że każdy obiekt oraz strzałka posiada nazwę. Z reguły obiekty oznaczamy wielkimi, a strzałki małymi literami.



Rysunek 3: Przykład kategorii z obiektami A, B i C oraz strzałkami (między innymi) f, g i h.

Jeżeli z obiektu A do B prowadzi strzałka f, to zapiszemy to jako $A \xrightarrow{f} B$. Między każdą parą obiektów może prowadzić wiele różnych strzałek. Możemy więc mieć $A \xrightarrow{f} B$ i $A \xrightarrow{g} B$, gdzie f i g są dwiema różnymi strzałkami.



Rysunek 4: Z jednego obiektu do drugiego może prowadzić wiele różnych strzałek.

Jeżeli dwa obiekty posiadają to samo oznaczenie, to w rzeczywistości są jednym obiektem, jedynie narysowanym dwa razy. Podobnie jeżeli dwie strzałki posiadają to samo oznaczenie, są w istocie tą samą strzałką. Nie działa to jednak w drugą stronę: dwie strzałki czy dwa obiekty o różnych oznaczeniach mogą być w rzeczywistości tą samą strzałką lub obiektem. Możemy zapisać na przykład $f = g$, aby zaznaczyć, że f i g opisują tę samą strzałkę.

Kategorie posiadają jeszcze jedną istotną własność. Jeżeli między dowolnymi obiektami X, Y, Z istnieją jakieś strzałki $X \xrightarrow{f} Y$ oraz $Y \xrightarrow{g} Z$, to musi istnieć także strzałka z X do Z, którą oznaczać będziemy przez $f \circ g$. Takie strzałki są częścią kategorii nawet jeżeli nie są narysowane na diagramie! Na przykład na rysunku 3, nie ma strzałki $A \xrightarrow{f \circ h} B$, jednak jest ona częścią tej kategorii. Podobnie strzałka $C \xrightarrow{g \circ g} C$ czy $A \xrightarrow{f \circ g \circ g} C$.

Zadania

1. Wypisz wszystkie strzałki w kategorii przedstawionej na rysunku poniżej. Podpowiedź: jest ich 6.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

2. Ile strzałek znajduje się w kategorii z rysunku 3? Wypisz kilka.

3. Narysuj przykład kategorii, która posiada 5 obiektów, ale nieskończenie wiele strzałek. Jaki warunek musi spełniać kategoria ze skończoną liczbą obiektów, aby mieć nieskończenie wiele strzałek?