Wprowadzenie do teorii grafów

Malachoviacus Informaticus – V edycja

28 marca 2018

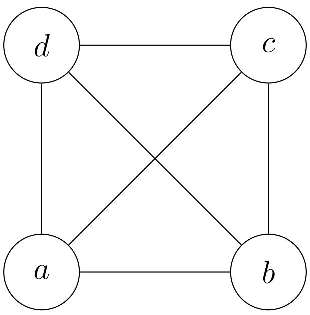
Wprowadzenie

Poniższy dokument zawiera wprowadzenie do teorii grafów. Omawia pojęcia, których znajomość będzie niezbędna do rozwiązania zadań w drugim etapie konkursu. Polecamy dokładnie zapoznać się z dostarczonymi wyjaśnieniami. Przydatne może być również wyszukanie dodatkowych informacji na własną rękę.

Zapoznanie się i zrozumienie informacji zawartych poniżej jest częścią konkursu. Rozwiązywanie zadań wymienionych na końcu dokumentu **nie** jest wymagane, jednak może pomóc w lepszym zrozumieniu materiału.

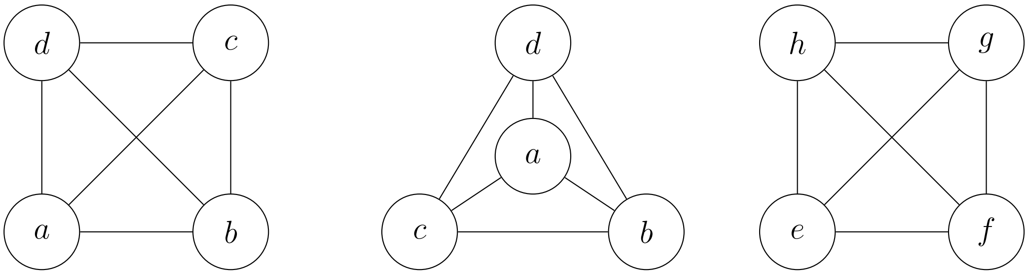
Wierzchołki i krawędzie

Graf to matematyczna konstrukcja składająca się z **wierzchołków** oraz łączących je **krawędzi**. Wierzchołki będziemy oznaczać małymi literami alfabetu (a, b, c, …), a krawędzie jako pary wierzchołków, np. (a, c), (b, b) itp. Dwa wierzchołki połączone krawędzią nazywamy **sąsiadami**.



Rysunek 1: Przykład grafu posiadającego wierzchołki a, b, c i d oraz krawędzie (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) i (c, d).

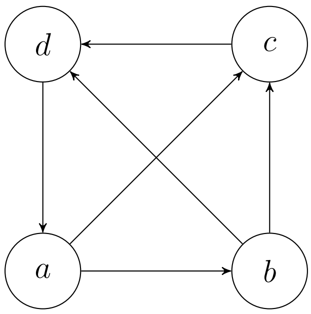
Diagramy takie jak na rysunku 1 stanowią jedynie graficzną reprezentację grafów. Położenie wierzchołków ani kształt krawędzi nie są w rzeczywistości częścią grafu. Również oznaczenia literowe wierzchołków istnieją jedynie dla ich rozróżnienia wewnątrz grafu. Możemy je dowolnie zmieniać, nie wpływając w żaden sposób na ogólną strukturę.



Rysunek 2: Powyższe grafy, mimo różnic w wyglądzie i oznaczeniach wierzchołków, w rzeczywistości są identyczne.

Grafy skierowane i nieskierowane

Graf skierowany to taki, w którym każda z krawędzi ma przypisany kierunek. W takim grafie krawędź (u, v) różni się od krawędzi (v, u). Na diagramach oznaczamy to przy użyciu strzałki na końcu każdej z krawędzi.



Rysunek 3: Przykład grafu skierowanego.

W **grafie nieskierowanym** krawędzie nie posiadają kierunku. W takim grafie krawędzie (u, v) i (v, u) są identyczne. Na diagramach krawędzie będą po prostu ciągłymi liniami, tak jak na rysunkach 1 i 2.

Ścieżki i cykle

Ścieżką w grafie nazywamy ciąg krawędzi taki, że każda kolejna krawędź zaczyna się tam, gdzie poprzednia się skończyła. Przykładem ścieżki w grafie na rysunku 1 będzie $(a, c), (c, b), (b, d)$. Dla skrócenia zapisu możemy podawać jedynie kolejne wierzchołki (np. a, c, b, d), jednak należy pamiętać, że ścieżka jest ciągiem krawędzi, nie wierzchołków.

Zwróć uwagę, że mimo posiadania tych samych wierzchołków i niemal tych samych krawędzi, graf z rysunku 3 nie posiada ścieżki a, c, b, d, ponieważ nie istnieje w nim krawędź (b, c), a jedynie (c, b).

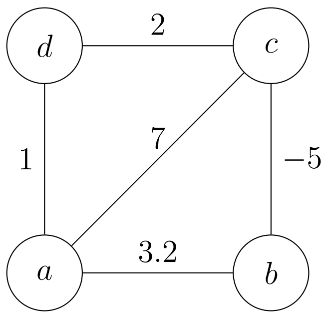
Długością ścieżki nazywamy liczbę składających się na nią krawędzi, stąd przykładowa ścieżka wymieniona powyżej ma długość 3.

Cykl to taka ścieżka w grafie, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku. W grafie na rysunku 1 mamy kilka cykli, na przykład a, b, d, a. Graf, który nie posiada cykli nazywamy **acyklicznym**.

Jako że cykl jest ścieżką, to możemy również policzyć jego długość, zliczając wszystkie krawędzie składające się na niego.

Grafy ważone

Graf ważony to taki, w którym krawędziom przypisujemy **wagi**, czyli pewne liczbowe wartości. Przydatne może to być na przykład gdy chcemy w postaci grafu przedstawić plan dróg w mieście – każda droga może mieć inną długość. Wagi będziemy zapisywać na rysunku obok odpowiednich krawędzi.



Rysunek 4: Przykład grafu ważonego

Jako że kształt i długość krawędzi na rysunku nie ma znaczenia, długość krawędzi na rysunku nie musi w żaden sposób odpowiadać jej wadze. Na rysunku powyżej krawędzie (a, b), (b, c), (c, d) i (d, a) mają tę samą długość, jednak zupełnie różne wagi.

Wagi krawędzi nie muszą również spełniać nierówności trójkąta. Na przykład na rysunku powyżej suma wag krawędzi (a, d) i (d, c) jest równa 3, a więc mniejsza niż waga krawędzi (a, c) równa 7.

Wagi krawędzi nie muszą być liczbami naturalnymi. Nic nie stoi na przeszkodzie aby wykorzystać ułamki, a nawet liczby ujemne, jak w przypadku krawędzi (b, c) na rysunku powyżej.

Długość ścieżki (także cyklu) w grafie ważonym będzie równa sumie wag krawędzi składających się na tę ścieżkę. Na przykład długość ścieżki (d, c), (c, a), (a, b) wynosi $2 + 7 + 3 = 12$. Ujemne wagi krawędzi będą zmniejszać długość ścieżki. Stąd ścieżka (b, c), (c, a), (a, d) ma długość 3.

Zadania

Dla obycia się z ideą grafów możesz wykonać następujące zadania:

1. I edycja, I etap, zadanie 2: „Problem mostów Królewieckich"
2. I edycja, II etap, zadanie 3: „Obliczenia równoległe po raz drugi"
3. II edycja, II etap, zadanie 2: „Odśmiecanie pamięci"
4. III edycja, I etap, zadanie 1: „Sortowanie topologiczne"
5. IV edycja, I etap, zadanie 1: „Sortujące drzewa"